

Monday, July 17, 2023

1.1 Preliminary Considerations of Infinity

1.1.1 Zeno's Paradox

- 如果乌龟在 Zeno 身前与 Zeno 同时出发，Zeno 就永远追不上乌龟
 - 每当 Zeno 跑到乌龟上一时刻所在的地方，乌龟又已经向前爬了一点
 - 如何解决这个悖论？ e.g. 乌龟起初在 Zeno 身前10米，乌龟速度1米/秒，Zeno 10米/秒
 - $1 + 0.1 + 0.01 + 0.001 \dots$

Question: Zeno 的悖论和无穷这个概念之间有什么联系？

1.1.2 The “Sin” of Dividing by Zero

- 为什么除以零是不被允许的？
 - 将一条长度为1的线段切分成长为1/100的小线段，则能分100份
 - 分为长为0的线段，能分成多少份？
 - 无穷 ∞ 是一个数吗？

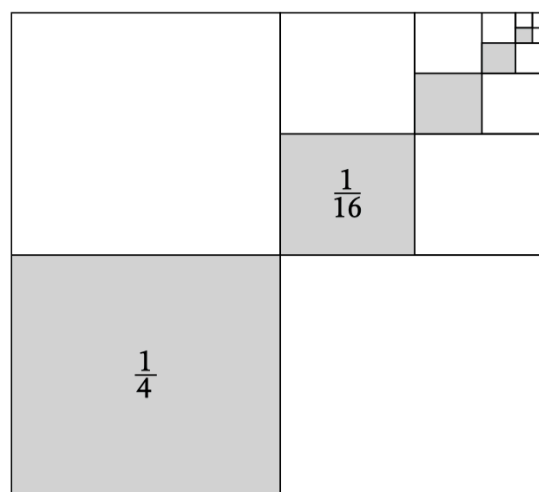
我们为什么相信无穷的加法（例如 Zeno 追上乌龟所需的时间）能给我们一个有限的数？
数与几何的关系似乎给了我们一些信心。

1.1.3 Geometric Series

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \dots = ?$$

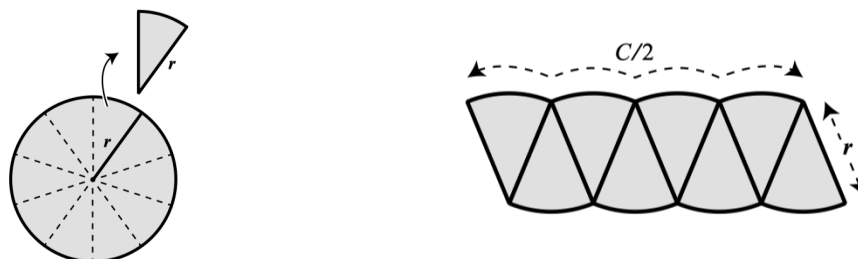
- 三个人分一块方蛋糕
阴影部分面积是每个人目前为止分到的蛋糕
所以上级数是？
- 几何级数的广泛公式：

$$1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \frac{1}{1-x}$$



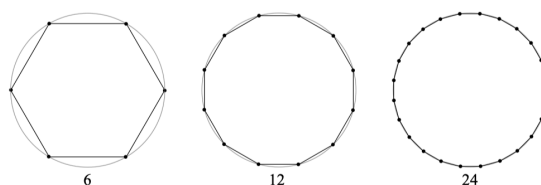
1.1.4 Dividing a Disc like a Pizza

- 用微积分的思想求出圆的周长与面积的关系： $A = rC/2$



1.1.5 Approximating a Circle by a Polygon

- 阿基米德用多边形近似圆，进而近似圆周率 π



以上两个例子中我们所探求的极限是完美的几何图形。极限的概念显得更加直观。

Questions:

1. 在披萨的例子中，只要我们所切出的扇形数量是有限的，它们就无法拼出一个完美的长方形。那我们何以知道这样得出的圆周长与面积的关系是正确的？
2. 我们如何严格规范“圆是其内嵌多边形的极限”这一直觉？

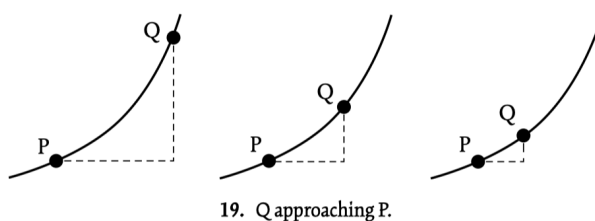
1.2 First Taste of Differential Calculus

Video: 3Blue1Brown微积分视频or

1.2.1 Derivative and Slope

直线的斜率：取曲线上两个点，求 y 坐标差值 / x 坐标差值

- 对于直线，斜率与取的点无关
- 对于一般的曲线，如此得到的斜率似乎与所选的两个点有关



- 通过让Q靠近P并取极限，我们得以为曲线上每个点P定义其斜率/导数为P点切线的斜率

$$\text{slope of curve at } P = \lim_{Q \rightarrow P} \frac{\text{increase in } y}{\text{increase in } x}.$$

当Q为P时，我们得到的是难以理解的 $0/0$ 的表达式，但先进行除法再取极限是合理的

Question:

1. 极限定义的这一 subtlety 如何帮助我们回答1.1.4和1.1.5的问题?
2. 假设x轴代表时间，y轴代表小车行驶路程，导数的物理意义是什么？如何在这个情形下从物理上解释导数的定义？
3. 如何用函数的语言写出导数的定义？

e.g. 设 $y = x^2$ ，选取一点 x_0 ，考虑临近一点 $x_0 + h$ 。则曲线在 x_0 的斜率为

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x_0 + h)^2 - x_0^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2x_0h + h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2x_0 + h) = 2x_0$$

Exercise: 证明 $y = 1/x$ 的导数是 $-1/x^2$

Proposition [Binomial Theorem]

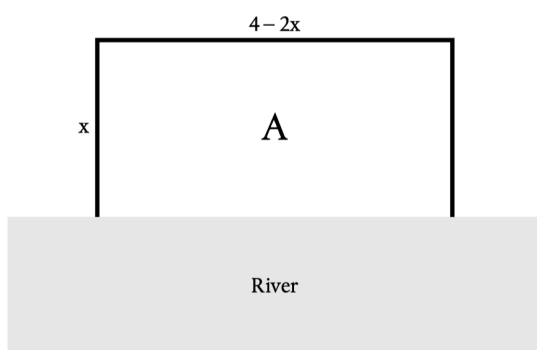
$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Exercise: 证明 $y = x^n$ 的导数是 nx^{n-1}

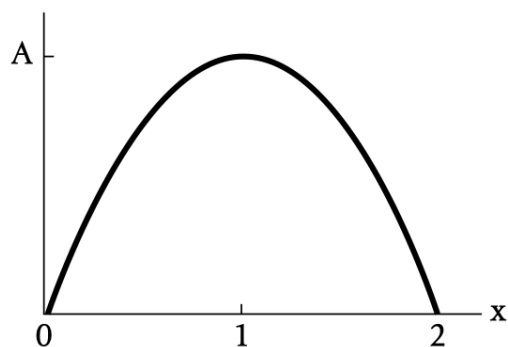
1.2.2 Applications of Derivative

- 导数为0，则函数取局部极值

e.g. 用4米长的栅栏在河边围一个长方形， x 应取多少使得面积最大？



28. A maximization problem.



29. How A depends on x.

对面积 $A = x(4 - 2x)$ 求导得 $\frac{dA}{dx} = 4 - 4x$ ，所以取 $x = 1$

- 具体是否取局部极值/取局部最大值还是局部最小值取决于二次导数

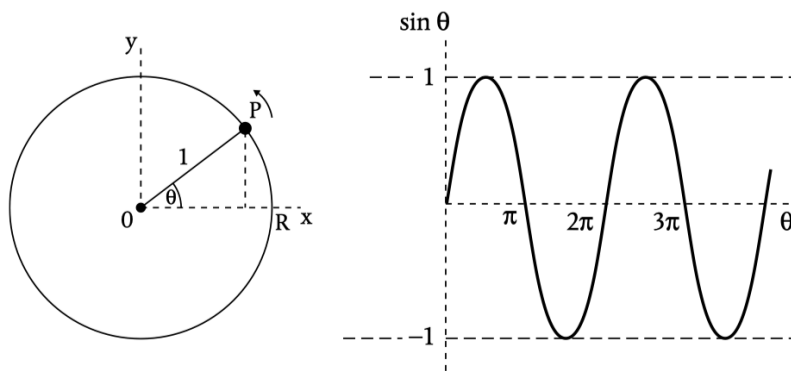
e.g. 比较 x^2 ， $-x^2$ ， x^3 在 $x = 0$ 时的表现

Video: 3Blue1Brown微积分视频03

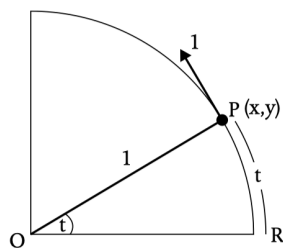
- 注意视频中舍弃高次项的思想： $df = [\dots]dx + [\dots]dx^2 + \dots$
- Exercise: 证明 $d(uv) = u dv + v du$

Hint: 可以效仿视频中对 x^2 导数的几何解释

- 用另一种几何方式证明 $\sin$ 和 $\cos$ 互为导数
 1. $\sin$ 可以视为正在进行匀速圆周运动的点 P 的高度， $\cos$ 则可以视为点 P 在横轴上的投影距离圆心的距离
 2. 则 $\sin$ 的导数为 P 点纵向的速度， $\cos$ 的导数为 P 点横向的速度

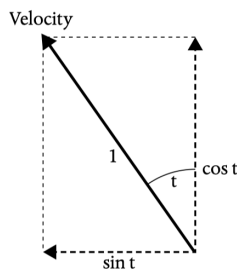


73. $\sin \theta$ as an oscillation.



74. Finding the rates of change.

$$\begin{aligned} x &= \cos t \\ y &= \sin t \end{aligned}$$



75. The velocity components.

1.3 Newton's Love for Inversion

- 牛顿的广义二项展开式: **p.10-11**
- 逆级数: **p.12-13**
 - 注意牛顿的方法得到了正确的结果，但是过程布满了逻辑漏洞
- 牛顿对正弦函数级数的推导: **p.18-21**
 - 牛顿的方法从如今的数学看来过于复杂
 - 正弦级数印证了这节课开始强调的主题：极限比构成它的无穷的组成部分更完美

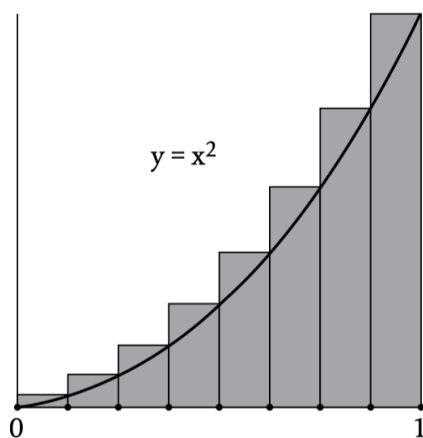
Tuesday, July 18, 2023

2.1 First Taste of Integration

2.1.1 Integration as Calculating Area/Volume

- 对一个函数求积分即是求函数与横轴所围区域的面积（在横轴下方的面积为负）
- 我们可以用“无限小”的长方形逼近这一面积

e.g. 求 $y = x^2$ 在 $x = 0$ 和 $x = 1$ 之间与实轴所围面积



38. Approximating a curved region by rectangles.

我们把 $[0,1]$ 分成长度为 $1/N$ 的 N 等份，利用公式

$$1^2 + 2^2 + \dots + N^2 = \frac{1}{6}N(N+1)(2N+1)$$

得到小长方形的总面积为 $\frac{1}{6}\left(1 + \frac{1}{N}\right)\left(2 + \frac{1}{N}\right)$

令 N 趋于无穷得到面积 $\frac{1}{3}$ 。一般地， $\int_a^b x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_a^b$

- 此种求面积的方法在1630左右已经被费马用于求出许多曲线的积分

Video: 3Blue1Brown 08 前10分钟

Exercise: 求底座半径为 R 高为 H 的圆锥体体积

Hint: 设变量 r 和 h 并用 R 和 H 表示它们之间的关系，然后使用 x^2 的积分

2.1.2 First Taste of the Fundamental Theorem of Calculus

Theorem [FTC Version 1] If a is a constant, then $\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x)$ (★)



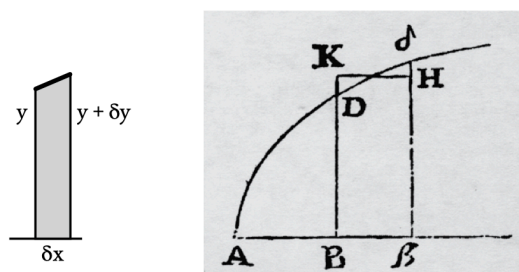
39. The fundamental theorem of calculus.

- 我们知道求导给出曲线斜率。这条定理告诉我们“逆向求导”给出的是曲线下的面积！

e.g. 这给出了一种更快捷的计算 x^2 的积分的方式：我们从1.2.1中知道 $\frac{d}{dx}(x^3) = 3x^2$ ，由此

推断出 $\int_0^x t^2 dt = \frac{t^3}{3}$

- $\frac{dA}{dx} = y$ 的证明：



41. (a) A small increase in area. (b) From Newton's *De Analysi* (1669, published 1711).

- 最原始的证明：把 x 向右增加 δx ，则所围面积增加大致为 $\delta A \approx y \delta x$
- 牛顿更为严谨的证明：我们可以画一个高度 v 在 y 与 $y + \delta y$ 之间的长方形，使得 $\delta A = v \delta x$ 。当 δx 趋于 0 时 v 也趋于 y 。

Reading: 牛顿《分析学》中求面积的法则 p. 14-17 (15-20 min)

请同学复述牛顿的论点和论据

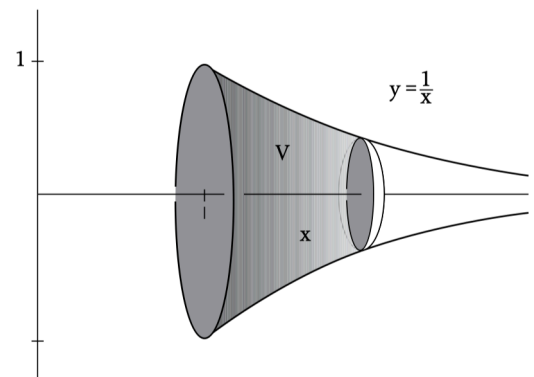
注意 $\frac{d}{dx} x^{\frac{m}{n}} = \frac{m}{n} x^{\frac{m}{n}-1}$ 这一结论也可以由微分的乘积法则推出

Question: 牛顿的计算和我们之前对与 x^2 积分的第二种计算仅从 (★) 看来是严谨的吗?

2.1.3 Two Counter Intuitive Integrals

Video: 3Blue1Brown 08 后10分钟 (复习上一小节的内容)

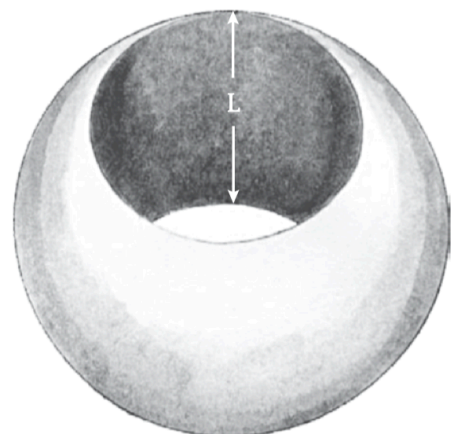
Exercise [无限长的物体可以有有限的体积]: 考虑 $y = 1/x$ 这一曲线绕横轴旋转形成的立体图形。用类似求圆锥体体积的方法把这一图形分成小块, 求这一图形在 $x \geq 1$ 部分的体积。在计算积分时, 可以用到我们昨天求出的一个积分。



42. Torricelli's trumpet.

Fact: 当我们在一个球体里挖出一个深度为 L 并径直穿过球体中心的圆锥体洞时, 不管球本身有多大, 所剩部分的体积都是 $\frac{1}{6}\pi L^3$

Question: 在地球上钻一个满足以上条件的 6 cm 深的洞, 地球就只剩下 36π cm² 的体积。这合理吗?



45. A hole through a sphere.

2.2 Leibniz's Contribution to Integration

- 莱布尼兹的变换定理：分部积分的特例 (p. 27-35) 若时间充裕可以让学生先阅读
 - 此定理主旨为借助中间变量 z 联系了 y 对于 x 的积分和 x 对于 y 的积分 (6)
 - 同时我们得到了一个可能方便积分计算的公式 (5)
 - 注意积分的变换与几何图形面积计算的变换之间的联系
- 莱布尼兹级数： $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$ (p. 35-37)
 - 注意在计算过程中 (5) 和 (8) 的使用帮助我们得到了无穷级数的积分

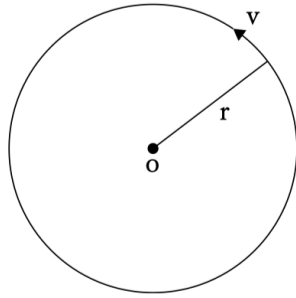
2.3 Calculus in Physics

2.3.1 Calculus, Gravity, Motion

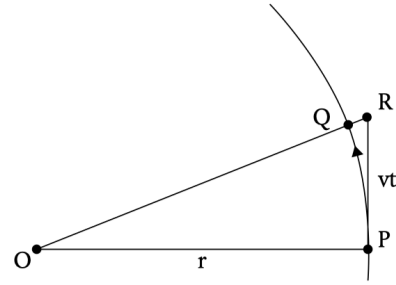


- 物体的三个运动公式 $s = \frac{1}{2}gt^2$, $v = gt$, $a = g$ ($F = mg$) 之间由微分/积分联系
- Video: 3Blue1Brown 09 脚注
- Question: 如果任意画一个横轴代表时间，纵轴代表路程/速度的曲线，你能判断物体在某一时间的运动状态吗？

Acceleration towards centre $= \frac{v^2}{r}$



54. Acceleration in circular motion.



55. Proof that acceleration $= v^2/r$.

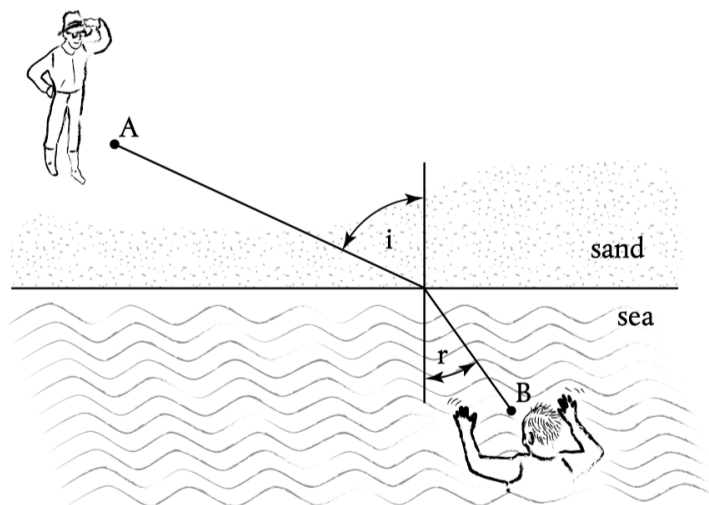
- 匀速圆周运动物体的向心加速度 $\frac{v^2}{r}$ 可以用微积分求出：
- 加速度是一个矢量，而不是标量。图中 QR 为物体从 P 点到 Q 点速度的变化
- 设 QR 长度为 h，则勾股定理给出 $r^2 + (vt)^2 = (r + h)^2$ ，解得 $h \approx \frac{1}{2} \frac{v^2}{r} t^2$

2.3.2 Chain Rule

- 若 y 是 x 的函数，而 x 又是 t 的函数，则 $\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$
 - e.g. 求 $y = (t^2 + 1)^3$ 对于 t 的导数
 - 链式法则更正式的形式： $\frac{d}{dx}g(h(x)) = \frac{dg}{dh}(h(x)) \cdot \frac{dh}{dx}(x)$
 - 证明：假设 x 变化为 $x + \delta x$ 则 h 变化为 $h(x) + \delta x \cdot \frac{dh}{dx}(x)$ ，所以 $\delta h = \delta x \cdot \frac{dh}{dx}(x)$ 。同理，g 变化为 $g(h(x)) + \delta h \cdot \frac{dg}{dh}(h(x)) = g(h(x)) + \delta x \cdot \frac{dg}{dh}(h(x)) \cdot \frac{dh}{dx}(x)$

Video: 3Blue1Brown 04，从约 8:40 开始

2.3.3 Refraction of Light



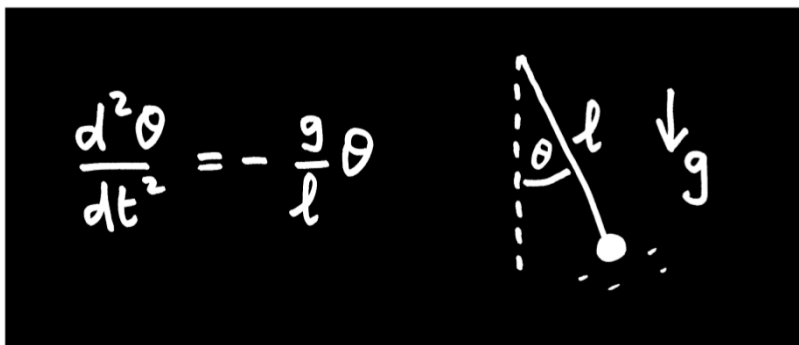
64. A shortest-time problem.

人在沙上奔跑与在水中游泳的速度是不同的，那么从 A 到 B 最快的路径是什么？

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{c_{\text{sand}}}{c_{\text{water}}};$$

- 这个问题属于第一节课讨论的微积分在优化上寻找最大/最小值的应用
- 我们先考虑一个错误的证明：设 A 到 B 横向距离为 l ，A 到入水点横向距离为 x ，则花费时间为 $\frac{x}{c_i \sin i} + \frac{l-x}{c_r \sin r}$ 对 x 求导并使导数为 0 得到 $\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{c_r}{c_i}$
- Question: 以上的证明为什么是错误的？
- 正确的证明参考维基百科 https://en.wikipedia.org/wiki/Snell%27s_law

2.3.4 Pendulum: a Differential Equation



82. The differential equation for small oscillations of a simple pendulum.

- 单摆的公式由受力分析和 $\sin x \approx x$ 的近似即可推出
- 求解时我们根据单摆运动规律“猜”一个解 $\theta = A \cos(\omega t)$

$$\frac{d}{dt}(\cos \omega t) = -\omega \sin \omega t$$

$$\frac{d}{dt}(\sin \omega t) = \omega \cos \omega t.$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2\theta}{dt^2} &= -A\omega^2 \cos \omega t \\ &= -\omega^2 \theta. \end{aligned}$$

由此得出 $\omega = \sqrt{g/l}$ ，以及解 $\theta = A \cos(\sqrt{\frac{g}{l}}t)$

Wednesday, July 19, 2023

3.1 Bernoulli Brothers and Infinite Series [Chapter 3]

3.1.1 The Harmonic Series

Proposition [A Necessary Condition for Series Convergence]: 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$, 则 $a_n \rightarrow 0$

Question: 为什么 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = c$, c 为一实数是同一个意思?

- 若我们调换条件与结论, 则以上陈述是不成立的。即: $a_n \rightarrow 0$ 为级数收敛的必要条件, 但不是充分条件。

Definition 调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$

Proposition: 调和级数发散

证明1: 不管我们在数列多么后的位置, 总能找到 n 个每项大于或等于 $1/2n$ 的项, 使得它们的总和大于 $1/2$

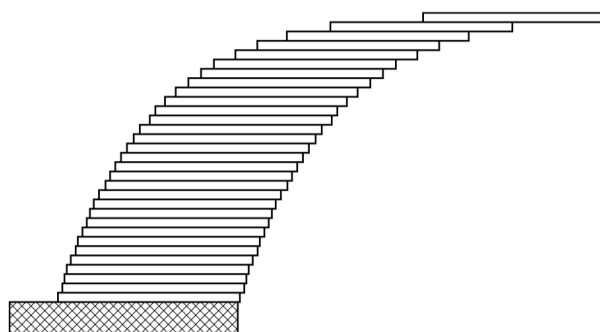
$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \\ & \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \\ & \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} \\ & \vdots \end{aligned}$$

证明2: Jakob Bernoulli 更为复杂的证明 (p. 43-47): 不管我们在数列多么后的位置, 剩余项的总和总是大于 1

- 调和级数发散的物理意义: 理论上我们可以从桌子边缘不断往外搭木板, 到达任意长度

N 块木板伸出桌沿的长度为

$$\frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{N} \right)$$



48. 31-box overhang.

3.1.2 Figurate Series

(p. 47-52) 考虑级数分母为等比数列，分子分别是自然数 (定理N - natural numbers)、平面的垛积数 (定理T - triangle)、三维的垛级数 (定理P - pyramid)。由此推出分子为立方体数的情形 (定理C - cube)。

- 注意伯努利求和的技巧与分子数列的“几何”意义密切相关

- 定理P 的推导运用了组合中的公式 $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$

在此情形下， $\binom{k+2}{3} = \binom{k+1}{3} + \binom{k+1}{2}$ 这一公式有几何上的意义

- 定理C 的推导运用了定义 $\binom{k+1}{3} = \frac{(k+1)k(k-1)}{3!} = \frac{1}{6}(k^3 - k)$

3.2 Euler and his “Spectacular Sums” [Chapter 4]

3.2.1 A Derivative and An Integral

Reading: p. 60-63

- 忽略63页上端的计算

Question: 欧拉在这两个微分和积分的计算中对于无穷级数的使用有什么不同？

3.2.2 Estimation of π

Reading: p. 63-65

- p.65-67: 欧拉对于 $\arctan$ 公式的迭代使用
- 注意欧拉每次所取的 x, y, z, w 值在带入 (6) 后总能把形如 $\pi = a \arctan(\theta) + b \arctan(\phi)$ 的式子转化为 $\pi = c \arctan(\theta) + d \arctan(\psi)$ ，而 $\psi < \phi$ ，使得级数可以更快收敛

3.2.3 Basel's Problem

Problem: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = ?$

- 欧拉的代数方法: **p. 68-71**

- $1 + Ax + Bx^2 + \dots = (1 + \alpha_1 x)(1 + \alpha_2 x) \dots$ 在有最高项的情况下是我们熟悉的因式分解
- 我们只考虑引理的前两项结论 $\sum \alpha_k = A$ 和 $\sum \alpha_k^2 = A^2 - 2B$, 并用这两个公式得出莱布尼兹级数与巴塞尔级数的和

- 巧妙的几何方法 Video: 3Blue1Brown 巴塞尔问题

- Fact: 巴塞尔问题的多种证明

<https://www.cnblogs.com/misaka01034/p/BaselProof.html#title01>

3.2.4 Euler's Constants

- 3.2.3.1 Euler's Constant γ

$$\gamma = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{n} - \log N \right)$$

- 调和级数是发散的, 但是定义 γ 的级数是收敛的!
- 证明:

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{n} - \log N = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} - \int_1^N \frac{1}{x} dx = \sum_{n=1}^{N-1} \int_n^{n+1} \left[\frac{1}{n} - \frac{1}{x} \right] dx + \frac{1}{N},$$

$$\left| \frac{1}{n} - \frac{1}{x} \right| \leq \frac{1}{n^2} \quad \text{for all } n \leq x \leq n+1.$$

我们知道巴塞尔级数是收敛的, 因此以上定义 γ 的级数也是收敛的。

3.2.3.2 Euler's Number e

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2 \cdot 1} + \frac{x^3}{3 \cdot 2 \cdot 1} + \dots$$

• Question: 验证 $\frac{d}{dx}e^x = e^x$

• 带入 $x = 1$ 得到 $e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3 \cdot 2} + \frac{1}{4 \cdot 3 \cdot 2} + \dots$

• 另一种定义是 $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ 。但是对于任何大于 1 的数 a , $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n$ 是发散的！

• Fact: 两种定义是等价的 <https://brilliant.org/wiki/eulers-number/>

3.3 Taylor Series: connecting Series and Functions

泰勒级数的基本问题：如何把一个函数 $f(x)$ 用级数的形式写成

$$f(x) = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \dots (*)$$

我们知道多项式的求导遵循简单的规律，于是我们计算

$$f'(x) = B + 2Cx + 3Dx^2 + \dots$$

$$f''(x) = 2C + 2 \cdot 3Dx + \dots$$

$$f'''(x) = 2 \cdot 3D + \dots$$

在带入 $x = 0$ 后，我们发现 (*) 中的系数与函数 f 的各阶导数有着一一对应的关系：

$$A = f(0), \quad B = f'(0),$$

$$C = \frac{1}{2}f''(0), \quad D = \frac{1}{2 \cdot 3}f'''(0)$$

Video: 3Blue1Brown 10 泰勒级数 前12分钟

Question: 视频中对 $\sin$ 与 $\cos$ 的讨论与 3.2.1, 1.2.2 中关于它们的讨论有什么异同？

Video: 3Blue1Brown 10 泰勒级数 剩余部分

Thursday, July 20, 2023

4.1 Logical Difficulties in Early Calculus [Chapter 5]

4.1.1 Newton's and Leibniz's Fallacies

- 为什么我们可以交换无穷级数与积分? $\int_a^b \left[\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \right] dx = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\int_a^b f_k(x) dx \right]$

- e.g. 莱布尼兹级数的计算为什么是正确的?

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \int_0^1 [z^2 - z^4 + z^6 - z^8 + \dots] = 1 - \left[\frac{z^3}{3} - \frac{z^5}{5} + \frac{z^7}{7} - \frac{z^9}{9} + \dots \right]_0^1$$

- 导数的定义在逻辑上是自洽的吗?

$$\text{slope of curve at } P = \lim_{Q \rightarrow P} \frac{\text{increase in } y}{\text{increase in } x}.$$

- 我们在第一节课中讨论了导数作为切线斜率的定义
- 但是在 Q 趋向 P 的过程中, x 与 y 的增量都是趋向于 0 的。牛顿对此的解释是:
“既不是在它们消失之前的比, 也不是在消失之后的比, 而是正当这些量消失时的比”

- 主教 Berkeley 的质疑: 考虑对函数 $y = x^n$ 的导数的推导 (课上可以只考虑 x^2)

- 在这一步骤中 o 是一个非零量

$$\begin{aligned} \frac{(x+o)^n - x^n}{o} &= \frac{nx^{n-1}o + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}o^2 + \dots + nx^{n-1}o + o^n}{o} \\ &= nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}o + \dots + nx^{n-2}o + o^{n-1}. \end{aligned}$$

- 然而在最后得出结论时我们却让 o 变成零了

$$\frac{dy}{dx} = nx^{n-1} + 0 + \dots + 0 = nx^{n-1}.$$

4.1.2 d'Alembert's and Lagrange's Attempts

- 达朗贝尔：把定义导数的比值写成 z/u ，则导数 $\frac{dy}{dx}$ 为假设 z 和 u 为实数且不断减小时，比值 z/u 越来越接近的量。i.e. z 和 u 不必真的变为 0/
- 拉格朗日：用形式化的泰勒展开式理解导数：对于函数 f 和增量 i ，我们写出

$$f(x+i) = f(x) + ip(x) + i^2q(x) + i^3r(x) + \dots,$$

则 $p(x)$ 就是 $f(x)$ 的导数。e.g. **p.83** 用此方法求 $f(x) = \frac{1}{x^3}$ 的导数

- 当我们令 $i = 0$ 时并不会使 0 出现在分母中，因此这样的推导是严格的
- 但是这种对于导数的定义掩盖了导数的几何意义
- 而且泰勒级数与函数并没有一一对应的关系。柯西的反例：

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{if } x \neq 0, \\ 0 & \text{if } x = 0, \end{cases}$$

f 在 $x = 0$ 的各阶导数都是 0，因此泰勒展开与 $y = 0$ 这一常值函数相同。

Video: 3Blue1Brown 07 前10分钟

4.2 Cauchy: The Language of Limit [Chapter 6]

4.2.1 What is a Limit?

- 柯西用文字表述的极限定义：基于达朗贝尔的思想

“当属于一个变量的相继的值无限趋近某个固定值时，如果最终同固定值之差可以随意地小，那么这个固定值就称为所有这些值的极限”

- 维尔斯特拉斯用数学与逻辑符号表述的极限定义

- 数列极限：数列 $\{a_n\}$ 的极限为 a 当且仅当

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ s.t. } \forall n > N, |a_n - a| < \varepsilon$$

定义 2.1.1 (数列极限). 设 $\{a_n\}$ 为数列, $A \in \mathbb{R}$. 如果任给 $\varepsilon > 0$, 都存在正整数 $N = N(\varepsilon)$, 使得当 $n > N$ 时, 有

$$|a_n - A| < \varepsilon,$$

则称 $\{a_n\}$ 以 A 为极限, 或称 $\{a_n\}$ 收敛于 A , 记为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A \text{ 或 } a_n \rightarrow A \ (n \rightarrow \infty).$$

Question: 如何用数学与逻辑符号表示“ a 不是数列 $\{a_n\}$ 的极限”的条件?

e.g. 常数数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n = a \ \forall n \in \mathbb{N}$, 则此数列极限为 a

e.g. $\lim_{n \rightarrow \infty} 10^{-n} = 0$

$$0.99999\ldots = 1$$

e.g. 数列 $\{(-1)^n\}$ 不收敛

- 数列极限的概念帮助我们严格定义级数的含义：什么情况下 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 是收敛的？

$$\text{设 } s_N = \sum_{n=1}^N a_n, \text{ 则级数 } \sum_{n=1}^{\infty} a_n = s \text{ 当且仅当 } \lim_{N \rightarrow \infty} s_N = s$$

- 函数极限：函数 f 在点 x_0 的极限为 a 当且仅当

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ s.t. } \forall x \text{ satisfying } 0 < |x - x_0| < \delta, |f(x) - a| < \varepsilon$$

定义 3.1.1. 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的一个空心开邻域 $(x_0 - \delta_0, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta_0)$ 中有定义. 如果存在 $A \in \mathbb{R}$, 使得对任意给定的 $\varepsilon > 0$, 都存在 $0 < \delta < \delta_0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有

$$|f(x) - A| < \varepsilon,$$

则称函数 $f(x)$ 在 x_0 处 (当 x 趋于 x_0 时) 有极限 A , 记为

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \text{ 或 } f(x) \rightarrow A \text{ (} x \rightarrow x_0 \text{)}.$$

Question: 如何用数学与逻辑符号表示“ f 在 x_0 的极限不是 a ”的条件？

Definition: 函数 f 在点 x_0 是连续的当且仅当 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ 。函数 f 在区间 (a, b) 是连

续的当且仅当 $\forall x \in (a, b)$, 函数 f 在点 x 是连续的。

Question: 请组织语言解释函数 f 在点 x_0 是连续的这一概念。

- 为什么我们需要这样复杂的符号语言来定义连续函数这一直觉上显然的函数性质？为什么不能说所有可以“一笔”画成的函数都是连续的？考虑 **p.176** 的函数

$$T(x) = \begin{cases} x \sin(1/x) & \text{if } x \neq 0, \\ 0 & \text{if } x = 0, \end{cases}$$

- 函数极限与数列极限的联系：(梅加强 p.71-72)

定理 3.1.5 (Heine). 设函数 f 在 x_0 的一个空心开邻域内有定义, 则 f 在 x_0 处的极限为 A 当且仅当对任何收敛点列 $x_n \rightarrow x_0$ ($n \rightarrow \infty$) 且 $x_n \neq x_0$ ($\forall n$), 均有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A.$$

证明. 先证必要性. 由定义, 任给 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

现在设 $x_n \rightarrow x_0$, $x_n \neq x_0$. 仍由极限定义, 对于上述 δ , 存在 N , 使得当 $n > N$ 时 $0 < |x_n - x_0| < \delta$. 因此当 $n > N$ 时, 有

$$|f(x_n) - A| < \varepsilon,$$

这说明 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$.

我们用反证法来证明充分性. 如果 f 在 x_0 处极限不为 A (极限可能不存在), 则存在 $\varepsilon_0 > 0$, 使得对任何 $\delta > 0$, 都存在 x_δ , 使得

$$0 < |x_\delta - x_0| < \delta, \quad |f(x_\delta) - A| \geq \varepsilon_0.$$

特别地, 对 $\forall n \geq 1$, 均存在 x_n , 使得

$$0 < |x_n - x_0| < \frac{1}{n}, \quad |f(x_n) - A| \geq \varepsilon_0.$$

这说明 $x_n \rightarrow x_0$, $x_n \neq x_0$, 但 $f(x_n)$ 不收敛到 A . □

Question: 在证明之前, 你能否用 $\varepsilon - \delta$ 语言复述这一定理?

Corollary: 如果函数 f 在点 x_0 是连续的, 且 $\{x_n\}$ 这一数列满足 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$, 那么

$$f(x_0) = f(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$$

4.2.2 Calculus in the Language of Limit

- Intermediate Value Theorem 介值定理: **p.91-94**

- 证明的核心思想：利用数列极限与连续函数的关系
- 注意我们从理论上证明了满足 $f(a) = 0$ 的点 a 的存在，但是我们并没有具体说出 a 是什么。数学上对于“存在”的证明往往不需直接确立存在之物的所有属性
- Question: 我们如何从这个定理出发证明 f 在 $[x_0, y_0]$ 这个区间可以取介 $[f(x_0), f(y_0)]$ 中的任意值?

- Mean Value Theorem 中值定理: **p.94-97**

- 注意这个证明利用了 $\varepsilon - \delta$ 语言对于导数的定义，所以我们可以利用 f 与 f' 的不等式
- 中值定理在几何上是显然的，但是为了让数学摆脱直觉的谬误，我们需要这种证明

4.2.3 Second Taste of the Fundamental Theorem of Calculus

Question: 我们如何用中值定理以及微积分基本定理的第一形式推出积分的中值定理?

已知:
$$\frac{d}{dx} \int_{x_0}^x f(t) dt = f(x)$$

$$\exists c \in [x_0, y_0] \text{ s.t. } \frac{F(y_0) - F(x_0)}{y_0 - x_0} = F'(c)$$

证明:
$$\exists c \in [x_0, y_0] \text{ s.t. } \int_{x_0}^x f(x) dx = (x - x_0) f(c)$$

- 微积分基本定理的第二形式: **p.100-101**

Theorem [FTC Version 2]: 如果函数 F 满足 $F'(x) = f(x)$, 则

$$\int_{x_0}^x f(x) dx = F(x) - F(x_0)$$

- 第二形式由第一形式推出, 与第一形式共同说明了积分和微分互为逆运算
- 回顾 2.1.2 中牛顿对于 $\int_0^x t^{m/n} dt = \frac{n}{m+n} x^{(m+n)/n}$ 的推导。正因以上形式的微积分基本定理, 牛顿的推导得以成立。

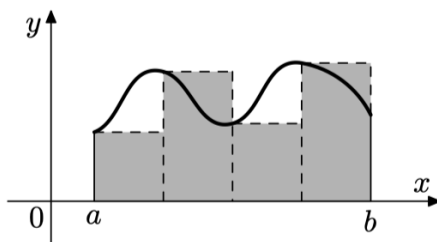
5.1 Which Functions Can be Integrated?

- 对函数看法的转变 p.109-114

- 牛顿与莱布尼兹的观点：函数是曲线
- 欧拉的近代观点：函数是由变量和常量构成的
- 现代观点：函数是一个集合到另一个集合的映射
- e.g. 狄利克雷函数就是现代观念下的一个函数

$$\phi(x) = \begin{cases} c & \text{if } x \text{ is rational,} \\ d & \text{if } x \text{ is irrational.} \end{cases}$$

- 柯西对于连续函数的积分



- 把区间等分为 n 份，如图算出矩形面积和，并使 n 趋于无穷取得极限

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \left[f\left(a + \frac{i-1}{n}(b-a)\right) + f\left(a + \frac{i}{n}(b-a)\right) \right] \frac{1}{n}(b-a) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f\left(a + \frac{i}{n}(b-a)\right)(b-a), \end{aligned}$$

Question: 证明因为 f 是连续的所以极限存在。如何把直觉转换为 $\varepsilon - \delta$ 语言?

- 柯西对于积分的定义可以处理函数有有限个不连续点时的情况，但无法处理对于狄利克雷函数这样“非常”不连续的函数的积分

5.2 Riemann Integral

5.2.1 Supremum and Infimum

Definition: 一个实数的集合 X 存在一个上确界 (least upper bound) $M = \sup X$ 满足性质

- 1) $x \leq M \quad \forall x \in X$ 2) If M' satisfies $x \leq M' \quad \forall x \in X$, then $M \leq M'$

Question: 相应的概念是下确界 (greatest lower bound) $m = \inf X$ 。下确界应满足性质?

- 上确界与下确界的存在是实数的公理，一般不需要用更底层的公理证明

5.2.2 The Definition of Riemann Integral p.114-117

- 首先我们考虑黎曼使用极限的定义
- 利用上确界与下确界的概念，我们可以给出一个等价的定义 (梅加强 p.212)

除了连续函数之外，还有哪些有界函数是可积的呢？如同研究有界数列的收敛性要考虑上极限和下极限一样，我们考虑有界函数 Riemann 和的“最大”值和“最小”值。对于分割

$$\pi: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b,$$

记 $M_i = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$, $m_i = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$, 令

$$S = \sum_{i=1}^n M_i \cdot \Delta x_i, \quad s = \sum_{i=1}^n m_i \cdot \Delta x_i,$$

我们称 S 为 f 关于 π 的 Darboux 上和, 简称上和, 也记为 $S(\pi)$ 或 $S(\pi, f)$; 而 s 称为 Darboux 下和, 简称下和, 也记为 $s(\pi)$ 或 $s(\pi, f)$.

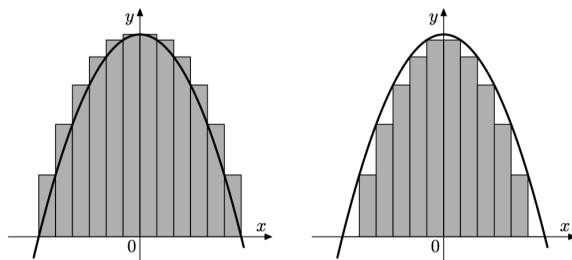


图 6.3 上和与下和

我们将上和记为 $U(\pi)$ 将下和记为 $L(\pi)$ 。函数黎曼可积就是说 $\lim_{d \rightarrow 0} U(\pi) - L(\pi) = 0$

剩余时间用于复习。若时间充裕可以讨论第8章剩余内容。

6.1 Things Uniform

6.1.1 Uniform Continuity p.149-151

定义 3.4.1 (一致连续). 设函数 $f(x)$ 定义在区间 I 中, 如果任给 $\varepsilon > 0$, 均存在 $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, 使得当 $x_1, x_2 \in I$, 且 $|x_1 - x_2| < \delta$ 时有

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon,$$

则称 $f(x)$ 在 I 中一致连续.

Questions: 1. 这个定义与连续函数的定义区别在哪儿?

2. 利用第四节课讨论的寻找逆命题的方法, 写出一个函数不一致连续的条件

e.g. 连续但是不一致连续的函数:

1. $f(x) = 1/x$ **p.150**

2. $f(x) = e^x$: 从几何上可以看出, 对于任意给定的 ε 和 δ , 都存在足够大的 x_1, x_2 满足 $|x_1 - x_2| < \delta$ 但是 $e^{x_1} - e^{x_2} \geq \varepsilon$

- 柯西对于中值定理的证明 (**p.95**) 假设了函数的一致连续性。我们之后会证明: 在闭区间 $[a, b]$ 上连续的函数一定是一致连续的

6.1.2 Uniform Convergence of a Sequence of Functions p.151-157

- 点态收敛 (简称收敛)

设 I 为区间, $\{g_n(x)\}$ 为 I 中定义的一列函数. 如果存在 I 中的函数 $g(x)$ 使得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x_0) = g(x_0), \quad \forall x_0 \in I,$$

则称函数列 $\{g_n\}$ 收敛于 g , 记为 $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n = g$ 或 $g_n \rightarrow g (n \rightarrow \infty)$.

- 一致收敛

定义 9.1.1 (一致收敛). 如果任给 $\varepsilon > 0$, 均存在与 $x \in I$ 无关的正整数 $N = N(\varepsilon)$, 使得当 $n > N$ 时

$$|g_n(x) - g(x)| < \varepsilon, \quad \forall x \in I, \quad (*)$$

则称函数列 $\{g_n\}$ 在 I 中一致收敛于 g , 记为 $g_n \Rightarrow g$.

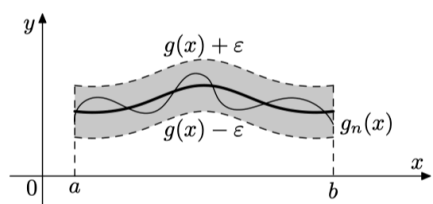
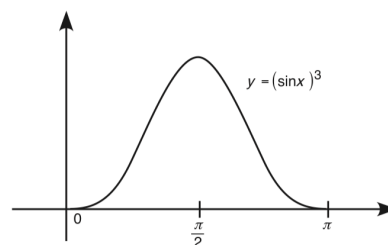
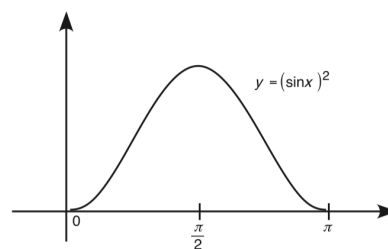
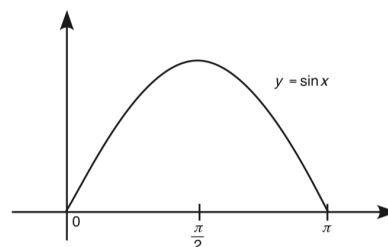
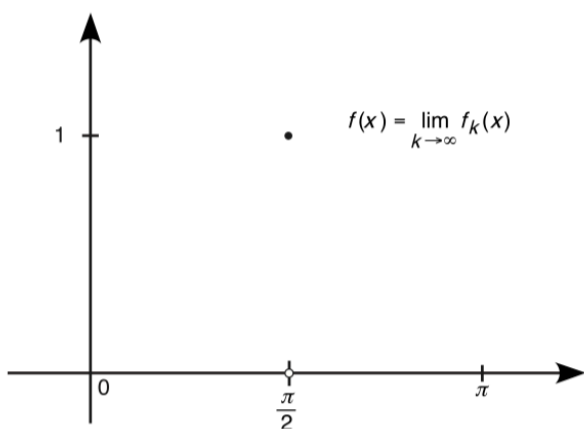


图 9.1 一致收敛

- 点态收敛概念上的问题：点态极限函数是否会继承函数列中函数的性质？

- e.g. 1. 连续性无法继承 **p.151-153**



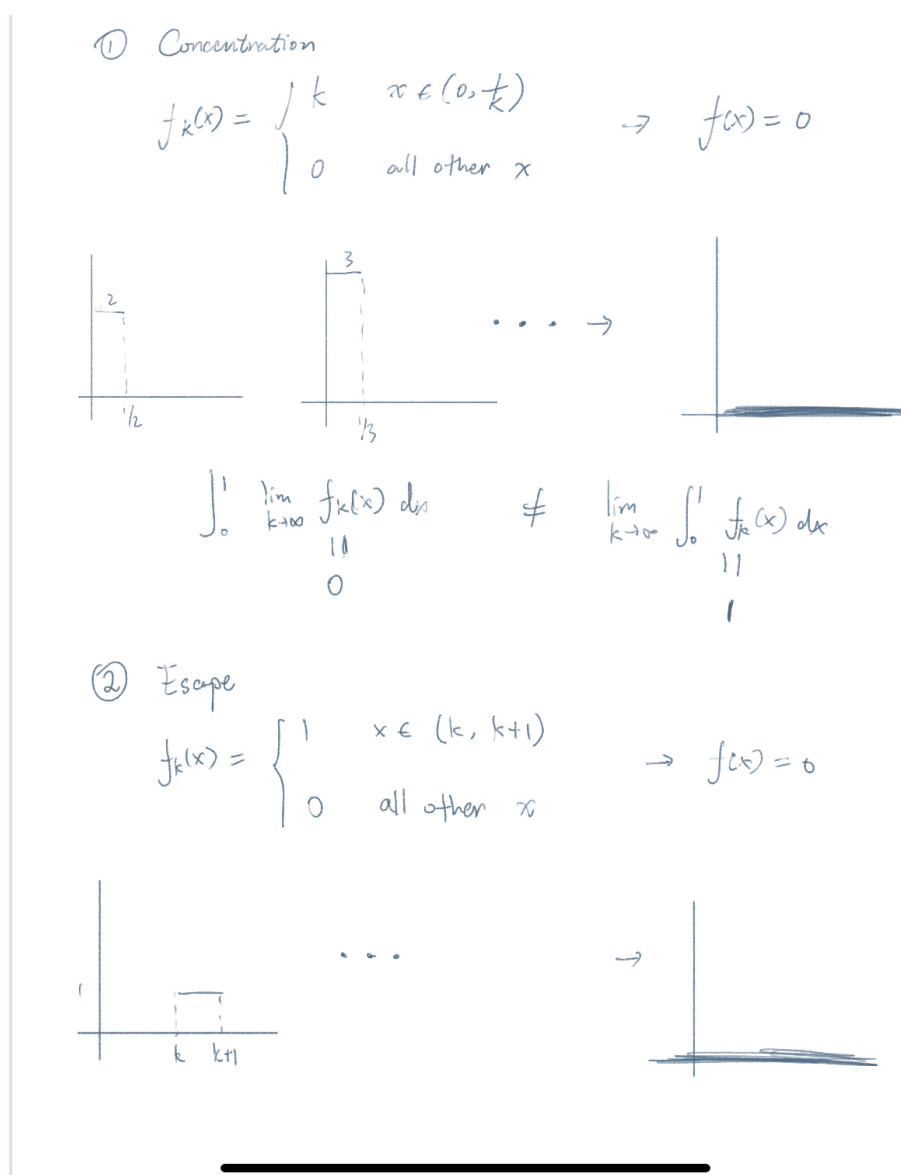
- e.g. 2 积分无法与函数极限交换：回忆我们在 4.I.I 中的问题

$$\int_a^b \left[\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \right] dx \stackrel{?}{=} \sum_{k=1}^{\infty} \left[\int_a^b f_k(x) dx \right]$$

可以被转化为用极限语言描述的问题

$$\int_a^b \left[\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) \right] dx \stackrel{?}{=} \lim_{k \rightarrow \infty} \left[\int_a^b f_k(x) dx \right]$$

如果函数列 $\{f_k\}$ 点态收敛到函数 f ，以上式子在一般情况下是不成立的



Question: 以上函数一致收敛吗?

- 维尔斯特拉斯的两个定理：如果用一致收敛替代点态收敛，那么函数的极限可以继承连续性，也可以和积分进行交换。p. 158

定理 1 如果 $\{f_k\}$ 是在区间 $[a, b]$ 上一致收敛于 f 的连续函数的序列，那么 f 本身也是连续函数。

定理 2 如果 $\{f_k\}$ 是在区间 $[a, b]$ 上一致收敛于 f 的有界黎曼可积函数的序列，那么 f 在 $[a, b]$ 上是黎曼可积的，并且

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left[\int_a^b f_k(x) dx \right] = \int_a^b \left[\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) \right] dx = \int_a^b f(x) dx$$

维尔斯特拉斯所提出的一致收敛的概念阐明了函数极限与连续性、可积性之间的关系，但是有许多相似的问题还悬而未决。我们或许可以从以上的讨论中看出，从例子出发可以帮助我们找到更为合适的定义或定理。

6.2 Pathological Functions

6.2.1 Riemann's and Weierstrass's Functions

主要矛盾：连续性、可积性、可微性、介值性之间有什么联系？

主要方法：特殊例子与理论探索的结合

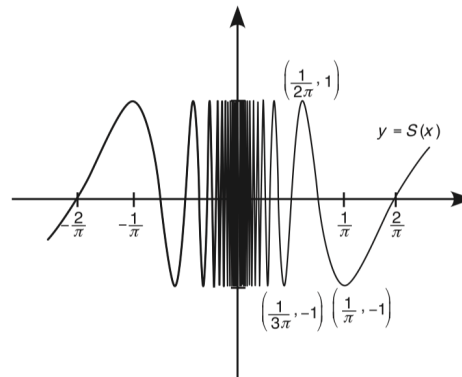
- 直尺函数与黎曼病态函数 p. 121-126：存在有无限个不连续点的可积函数
- 维尔斯特拉斯病态函数 p. 161-168：存在一个处处连续却无处可微的函数

Question: 我们知道，一个可微函数一定是连续的，因此维尔斯特拉斯的函数违背了一般直觉。为什么一个可微函数一定是连续的？请联系导数与连续性的极限定义。

以上两个函数的定义和各自性质的证明非常繁琐（因此我们也不会讨论），这引来了数学界同行的批评 p. 169 但是黎曼和维尔斯特拉斯这样举例的方法能帮助我们提出新问题。

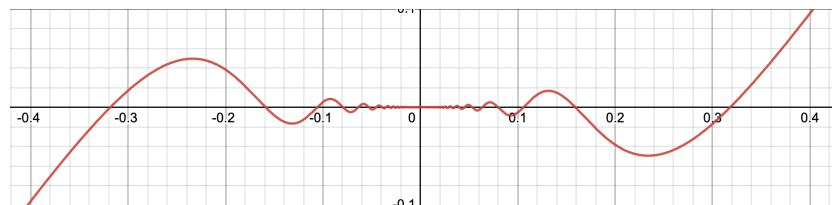
6.2.2 Continuity, Differentiability, Intermediate Value Property **p. 175-181**

$$S(x) = \begin{cases} \cos(1/x) & \text{if } x \neq 0 \\ 0 & \text{if } x = 0 \end{cases}$$



- $S(x)$ 说明了不连续的函数也可以有介值特性 **p. 175-176, 178-179**

$$U(x) = \begin{cases} x^2 \sin(1/x) & \text{if } x \neq 0, \\ 0 & \text{if } x = 0. \end{cases}$$



- $U(x)$ 说明了可微函数的导数可以是不连续的 **p. 177-178**
- 达布定理：可微函数的导数一定具有介值特性 **p. 179-180**

证明达布定理前，我们用半严谨，半直觉的方式证明两个引理

1. 连续函数在有限闭区间上能取极小值 $\exists c \in [a, b]$ s.t. $g(c) = \inf_{x \in [a, b]} g(x)$
2. 如果 g 是可微函数，且在 $c \in (a, b)$ 取 $[a, b]$ 上的极小值，那么 $g'(c) = 0$

6.3 Cantor: Comparing Infinities

我们从前两节看出，数学问题的研究中找到关键的概念并给出确切的定义是至关重要的。康托的主要贡献是从分析学出发，创立了集合论，并用集合的概念反哺分析学。集合论在分析学中首先要处理的是数的集合。我们要了解实数是怎样一个集合，有怎样的性质。

6.3.1 The Completeness of Real Numbers p.183-185

- 实数完备性的四种形式是等价的，一般当作实数的公理；也可用整数构造实数。
- 由 C_1 推导 C_4 的过程如下：

定理 2.5.1 (Cantor). 设 $\{[a_n, b_n]\}$ 为递降闭区间套序列, 即

$$[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \cdots \supset [a_n, b_n] \supset \cdots.$$

如果 $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$, 则存在惟一的点 c , 使得 $c \in [a_n, b_n], \forall n \geq 1$.

证明. 由已知条件我们知道, 数列 $\{a_n\}$ 单调递增且有上界 b_1 , $\{b_n\}$ 单调递减且有下界 a_1 . 这说明 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 都收敛, 设极限分别为 a, b . 由极限的保序性, 有

$$a_n \leq a \leq b \leq b_n, \quad \forall n \geq 1.$$

即

$$0 \leq b - a \leq b_n - a_n \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty),$$

这说明 $a = b$. 于是 $c = a = b \in [a_n, b_n], \forall n \geq 1$. 如果另有 $c' \in [a_n, b_n], \forall n \geq 1$, 则由夹逼原理即知 $c' = a = b = c$. $\square$

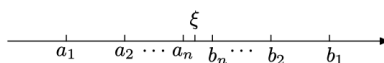


图 2.1 闭区间套

- 实数完备性的重要推论：

定理 2.5.2 (Bolzano). $\mathbb{R}$ 中有界数列必有收敛子列.

证明. 设 $\{a_n\}$ 为有界数列, 不妨设 $\{a_1, a_2, \dots\} \subset [a, b]$. 将 $[a, b]$ 二等分, 必有一个小区间包含了数列 $\{a_n\}$ 中的无限项, 记该小区间为 $[a_1, b_1]$, 并取 $a_{n_1} \in [a_1, b_1]$. 再将 $[a_1, b_1]$ 二等分, 仍有一个小区间含有 $\{a_n\}$ 中的无限项, 记该小区间为 $[a_2, b_2]$, 取 $a_{n_2} \in [a_2, b_2]$, 且 $n_2 > n_1$. 如此继续, 我们得到区间套

$$[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \cdots \supset [a_k, b_k] \supset \cdots, \quad b_k - a_k = \frac{1}{2^k} (b - a) \rightarrow 0,$$

以及 $\{a_n\}$ 的子列 $\{a_{n_k}\}$, 使得 $a_{n_k} \in [a_k, b_k], k = 1, 2, \dots$.

由闭区间套原理, 存在 $c \in [a_k, b_k], k = 1, 2, \dots$. 容易看出子列 $\{a_{n_k}\}$ 以 c 为极限. $\square$

- 我们可以用Bolzano定理严格证明连续函数在闭区间内取最小值

6.3.2 Countable vs. Uncountable

Definition: 记 $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ 为所有自然数的集合。给定一个集合 S ，当存在一个一一对应的函数 $f: \mathbb{N} \rightarrow S$ 时，我们说 S 是可数的。若这样的函数不存在， S 是不可数的。

- 可数的集合

- 所有非负偶数的集合是可数的 (课上证明)
- Question: 借鉴以上证明，你能否证明所有整数的集合 $\mathbb{Z}$ 是可数的?
- 所有非负整数对的集合 $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ 是可数的 (课上证明)
- Question: 借鉴以上证明，你能否证明有理数的集合 $\mathbb{Q}$ 是可数的?

- 不可数的集合

Theorem: 任何非空实数区间 (α, β) 都是不可数的

证明1: **p.186-188**

证明2: 康托著名的对角线论证 (课上证明)

- Question: 借鉴以上证明，你能否证明所有自然数的子集的集合是不可数的?

6.3.3 Cardinality and Existence **p.190-194**

Definition: 给定一个实数 α ，如果 α 是一个整数系数的多项式的根，那么我们说 α 是一个代数数。若不存在这样一个多项式，我们说 α 是一个超越数。

Theorem: 任何非空实数区间 (α, β) 内都存在至少一个超越数

- 笼统地讲，康托的证明说明了所有代数数是 $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ 的一个子集，因此是可数的
- 草堆捞针的比喻 **p.193**

